4.5 POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ PLANE

Două plane se pot găsi într-una dintre următoarele poziții reciproce:

- **plane paralele;**
- **plane concurente.**

4.5.1 Plane paralele. Se ştie din geometria în spațiu că două plane paralele intersectează un al treilea plan, după două drepte paralele. Rezultă de aici, că urmele a două plane paralele (intersecția fiecărui plan cu planele de proiecție), sunt paralele între ele (fig. 4.27):

$$[P] \parallel [Q] \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{p_h} \parallel \overline{q_h} \\ \overline{p_v'} \parallel \overline{q_v'} \end{cases} \qquad (4.19)$$

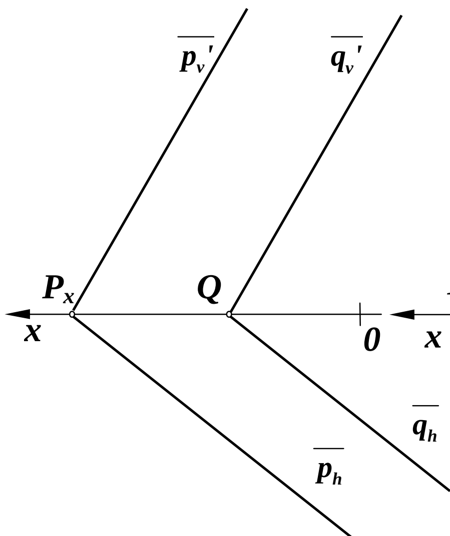


Fig. 4.27

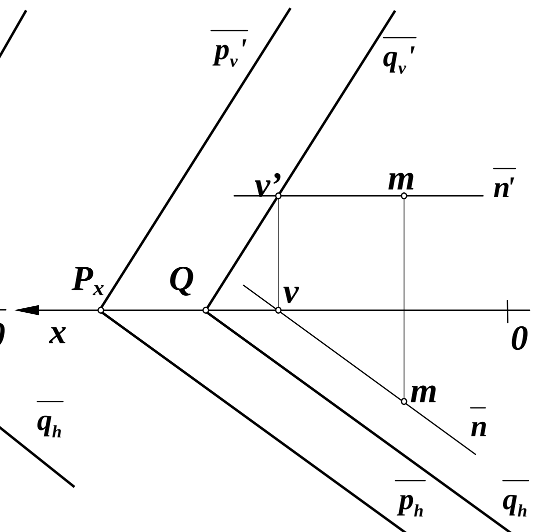
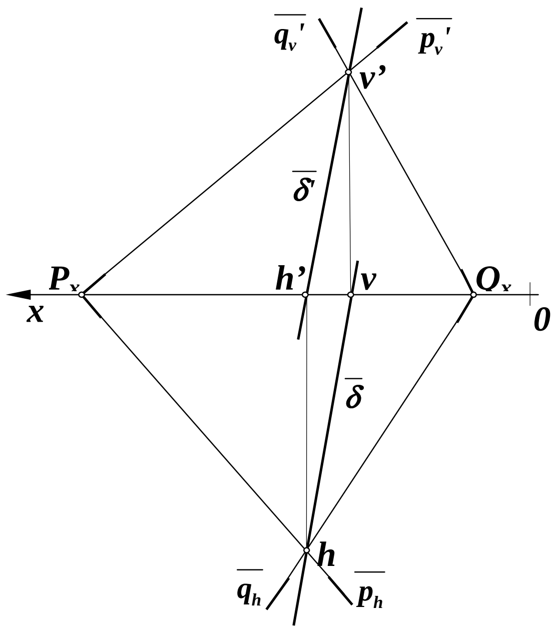


Fig. 4.28

Pe baza acestor proprietăți se poate realiza construcția unui plan **[Q]** paralel cu un plan **[P]** dat, printr-un punct dat ***M*** (fig. 4.28). Se ştie că un punct aparține unui plan, dacă se găseşte pe o dreaptă conținută în acel plan. O dreaptă de nivel sau de front a planului **[Q],** va avea o proiecție paralelă cu una din urmele planului, care la rândul ei este paralelă cu urma similară a planului dat **[P]**. Prin punctul ***M*** se construieşte de exemplu o dreaptă de nivel $\overline{N}$, care aparținând planului **[Q],** are proiecția orizontală paralelă cu urmele orizontale ale celor două plane. Se determină urma verticală a dreptei de nivel, ***V***(***v, v'***), prin care se trasează urmele planului cerut, respectând condiția de paralelism - relația (4.19).

4.5.2 Plane concurente. Intersecția a două plane este o dreaptă. Determinarea acestei drepte se poate face pe baza condiției de apartenență a unei drepte la un plan. Dreapta de intersecție aparține simultan celor două plane, deci urmele ei se găsesc concomitent pe urmele de acelaşi nume ale planelor; concluzia e simplă: urmele dreptei se găsesc la intersecția urmelor celor două plane (fig. 4.29)



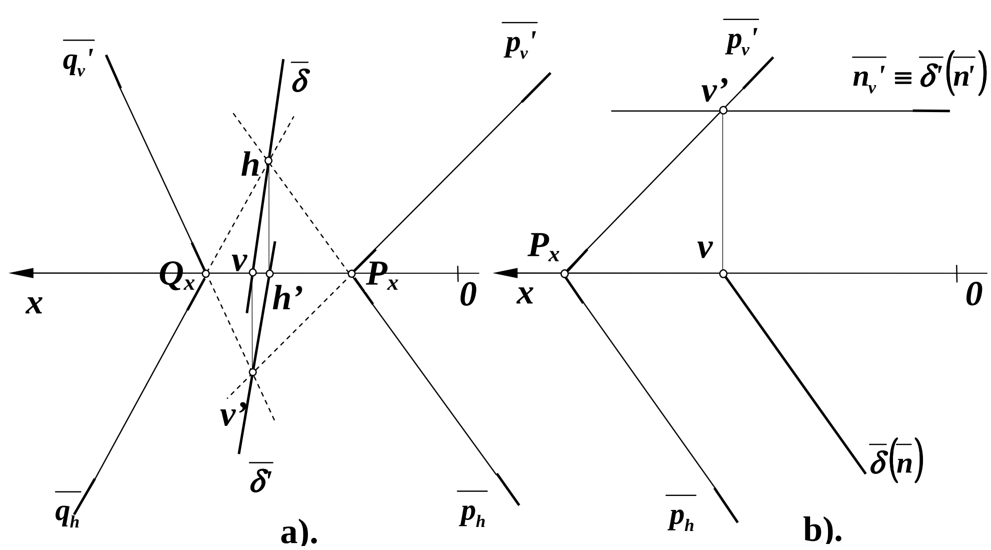
$$\left.\begin{array}{l} \overline{\Delta}\in[P]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} h\in \overline{p_h}\\ v'\in \overline{p_v'}\end{array}\right.\\ \overline{\Delta}\in[Q]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} h\in \overline{q_h}\\ v'\in \overline{q_v'}\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow \qquad (4.20)$$

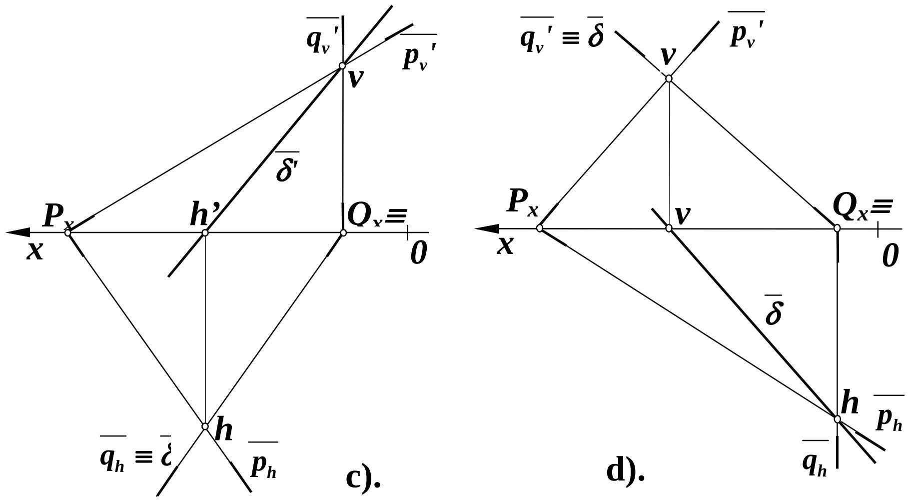
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} h=\overline{p_h}\cap\overline{q_h}\\ v'=\overline{p_v'}\cap\overline{q_v'}\end{array}\right.$$

Fig. 4.29

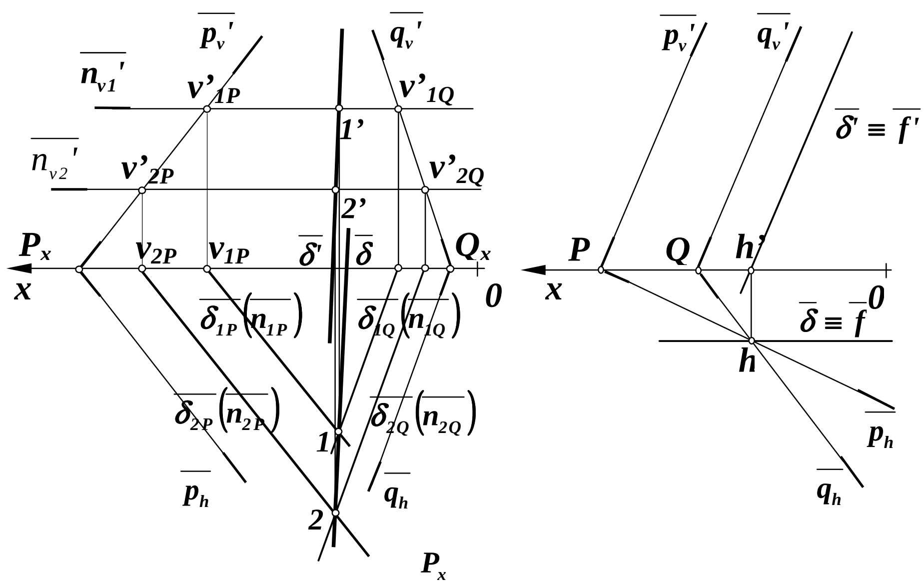
Uneori în aplicații, urmele planelor ce trebuiesc intersectate nu arată ca în fig. 4.29, sau nu se întâlnesc în spațiul epurei. În astfel se situații, fig. 4.30, se recurge la construcții ajutătoare (a), sau la etape intermediare (e), bazate pe intersecția unui plan oarecare cu un plan particular (b, c, d):

Urmărind fig. 4.30, se constată că în cazul a). se intersectează două plane ale căror urme orizontale, respectiv verticale, aparent nu se întâlnesc; prelungirile lor însă, trasate cu linie întreruptă, realizează o intersecție





c). d).



e)

asemănătoare celei din (4.20) şi fig. 4.29, cu singura deosebire că proiecțiile ***h***, respectiv ***v'***, ocupă alte poziții.

Fig. 4.30 - b). prezintă modalitatea de intersectare a unui plan oarecare [***P***] cu un plan de nivel [***N***]. Dreapta de intersecție $\overline{\Delta}$, aparținând şi planului de nivel, va fi cu siguranță o dreaptă de nivel ($\overline{\Delta} \equiv \overline{N}$), a cărei proiecție verticală este identică cu urma verticală a planului de nivel $\overline{n_v'} \equiv \overline{\delta'}(\overline{n'})$, în timp ce proiecția orizontală, conform proprietăților dreptei de nivel aparținând unui plan oarecare, va fi paralelă cu urma orizontală a acelui plan. În cazul intersecției unui plan oarecare cu un plan de front, problema se prezintă absolut similar.

Fig. 4.30 – c). şi d). sunt particularizări ale intersecţiei dintre două plane, atunci când unul dintre ele este plan particular de tipul plan vertical (c), respectiv de capăt (d). În ambele cazuri se evidenţiază proprietatea acestor plane de a strânge pe urma din planul de proiecţie faţă de care sunt perpendiculare, proiecţiile tuturor elementelor conţinute în plan, deci şi ale dreptei de intersecţie $\overline{\Delta}$: $\overline{q_h} \equiv \overline{\delta}$ în cazul planului vertical (c); $\overline{q_v'} \equiv \overline{\delta'}$ în cazul planului de capăt (d).

În cazul în care urmele celor două plane de intersectat nu se întâlnesc în spaţiul util al epurei, fig. 4.30 – e). se realizează mai întâi intersecţia fiecărui plan cu un plan particular (în cazul exemplificat, de nivel), obţinându-se două drepte de intersecţie concurente într-un punct comun ambelor plane [***P***] şi [***Q***] : ***1***(***1, 1'***); repetând procedura se determină un al doilea punct comun celor două plane, ***2***(***2, 2'***). Aceste două puncte definesc dreapta de intersecţie $\overline{\Delta}$. Este evident că:

$$\begin{cases} \overline{n_{v1}'} \equiv \overline{\delta_{1P}'}\left(\overline{n_{1P}'}\right) \equiv \overline{\delta_{1Q}'}\left(\overline{n_{1Q}'}\right) \\ \\ \overline{n_{v2}'} \equiv \overline{\delta_{2P}'}\left(\overline{n_{2P}'}\right) \equiv \overline{\delta_{2Q}'}\left(\overline{n_{2Q}'}\right) \end{cases} \tag{4.21}$$

Ultima exemplificare, fig. 4.30 – f). se referă la intersecţia a două plane oarecare, ale căror urme, fie verticale, fie orizontale, sunt paralele. În astfel de situaţii, dreapta de intersecţie $\overline{\Delta}$ va fi paralelă cu planul de proiecţie în care urmele planelor de intersectat sunt paralele. Această afirmaţie se bazează pe relaţia (4.20) şi pe faptul că două drepte paralele (urmele celor două plane) se întâlnesc la infinit. Dreapta $\overline{\Delta}$, care trebuie să treacă prin acel punct, va fi deci paralelă cu urmele în cauză. Cazul prezentat, propunând intersecţia a două plane având urmele verticale paralele, va avea ca soluţie o dreaptă de front, $\overline{\Delta} \equiv \overline{F}$, paralelă cu cele două urme verticale, la rândul lor, drepte de front.

Utilizând cazul general şi cazurile particulare exemplificate, intersecţia a două plane se poate realiza, indiferent de aspectul planelor, sau de tipul lor.

4.6 POZIŢIA UNEI DREPTE FAŢĂ DE UN PLAN

O dreaptă se poate găsi în trei situaţii distincte faţă de un plan, situaţii ce pot fi definite prin numărul de puncte comune ale dreptei cu planul:

- toate punctele dreptei se află în plan**,**

$\Rightarrow\ \overline{D}\subset[P]$ **- dreapta este inclusă în plan;**

- nici un punct al dreptei nu aparține planului**,**

  $\Rightarrow\ \overline{D}\parallel[P]$ **- dreapta este paralelă cu planul;**

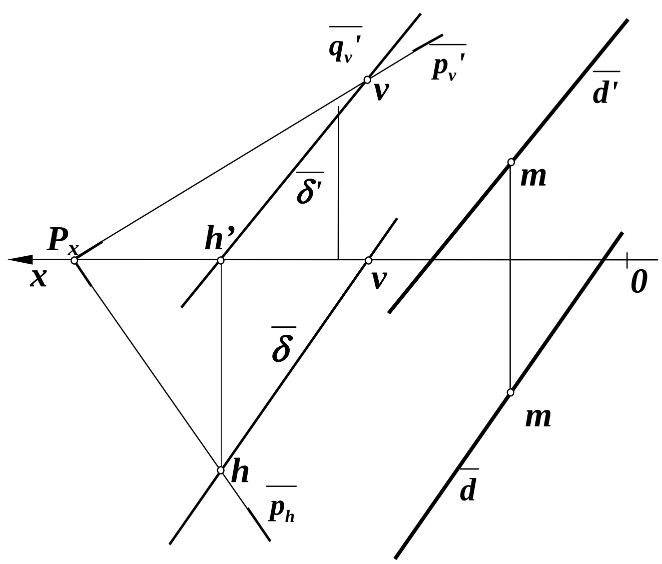
- un singur punct al dreptei aparține planului**,**

  $\Rightarrow\ \overline{D}\cap[P]=I$ **- dreapta este concurentă cu planul.**

4.6.1 Dreapta inclusă în plan. Apartenența unei drepte la un plan a fost prezentată în § 4.1 şi definită prin:

$$\overline{D}\subset[P]\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} h\in\overline{p_h} \\ v'\in\overline{p_v'} \end{cases}$$

4.6.2 Dreapta paralelă cu un plan. O dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă situată în acel plan. Construcția unei astfel de drepte, printr-un punct dat ***M***, exterior planului **[*P*]** cunoscut (fig. 4.31), se bazează pe proprietățile dreptelor paralele în spațiu. Una dintre drepte, $\overline{\Delta}$ aparține planul dat, (deci există o infinitate de variante constructive), iar cea de a doua, care trebuie construită, $\overline{D}$ conținând punctul ***M***, are proiecțiile paralele cu proiecțiile de acelaşi nume ale primei drepte. Deci având: $M(m;m')$ şi $\overline{\Delta}(\overline{\delta},\overline{\delta'})\in[P]$, se construieşte $\overline{D}\supset M$, cu condiția $\overline{D}\parallel\overline{\Delta}$, adică: $m\in\overline{d}\parallel\overline{\delta}$ şi $m'\in\overline{d'}\parallel\overline{\delta'}$.



$$\begin{cases} M\notin[P] \\ M\in\overline{D} \\ \overline{D}\parallel[P] \end{cases}$$

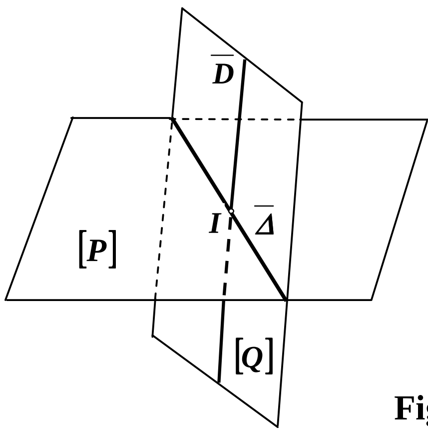
dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \overline{D}\parallel\overline{\Delta}\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\begin{cases} \overline{d}\parallel\overline{\delta} \\ \overline{d'}\parallel\overline{\delta'} \end{cases} \\ \text{când}\quad \overline{\Delta}\in[P] \end{cases} \qquad (4.22)$$

Fig. 4.31

4.6.3 Intersecția unei drepte $\overline{D}$ cu un plan $[P]$. Este poate cea mai complexă problemă a cărei rezolvare, în general, necesită trei etape de lucru (dacă planul dat este un plan oarecare):

1. alegerea unui plan auxiliar proiectant $[Q]$, care să conțină dreapta dată $\overline{D}$; planul auxiliar ales depinde de tipul dreptei $\overline{D}$ şi de orientarea proiecțiilor sale: o dreaptă oarecare necesită un plan auxiliar de capăt sau vertical, iar o dreaptă particulară, un plan de nivel sau de front;
2. intersectarea planului auxiliar $[Q]$ cu planul dat $[P]$, rezultând o dreaptă $\overline{\Delta}$;
3. intersectarea dreptei $\overline{D}$ cu dreapta de intersecție $\overline{\Delta}$, ca drepte coplanare, aparținând planului auxiliar ales $[Q]$.



$$\overline{D}\cap[P]\Rightarrow$$
$$\begin{cases} 1.\quad \overline{D}\in[Q];[Q]\perp\{[V]sau[H]\} \\ 2.\quad [Q]\cap[P]=\overline{\Delta} \\ 3.\quad \overline{D}\cap\overline{\Delta}=I \end{cases} \qquad (4.23)$$
$$\Rightarrow\overline{D}\cap[P]=I$$

Fig. 4.32

Să vedem pe rând exemplificată intersecția unei drepte cu un plan oarecare (fig. 4.33), utilizând ca plane auxiliare diferitele plane proiectante față de $[V]$ şi $[H]$, studiate:

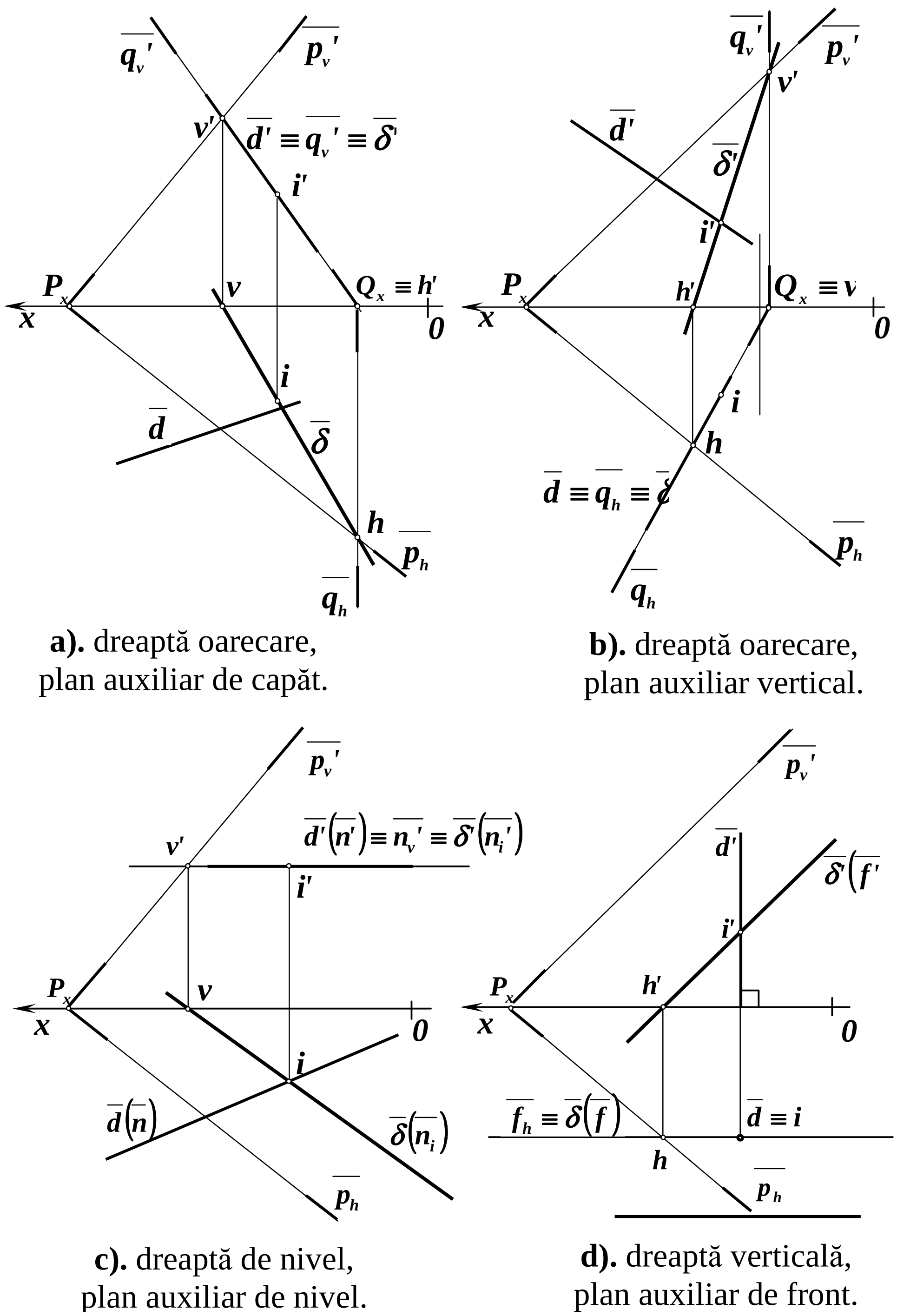
a) – când dreapta de intersectat cu un plan oarecare este şi ea oarecare, se alege un plan auxiliar de capăt $[Q]$ care conține dreapta $\overline{D}$; se intersectează cele două plane obținând dreapta $\overline{\Delta}$, care intersectată cu $\overline{D}$, duce la obținerea punctului căutat, I;

b) – o altă situație când dreapta de intersectat cu un plan oarecare este şi ea oarecare, permite alegerea unui plan auxiliar vertical $[Q]$ care conține dreapta $\overline{D}$; se intersectează cele două plane obținând dreapta $\overline{\Delta}$, care intersectată cu $\overline{D}$, duce la obținerea punctului I;

c) – când dreapta de intersectat cu un plan oarecare este particulară, se alege un plan auxiliar $[Q]$ care să conține dreapta $\overline{D}$, în acest caz dreaptă de nivel $\overline{D}(\overline{N})$; se intersectează cele două plane obținând dreapta $\overline{\Delta}(\overline{N_I})$ care intersectată cu $\overline{D}$ duce la obținerea punctului I;

d) **–** când dreapta de intersectat cu un plan oarecare este verticală, se alege un plan auxiliar care să conțină dreapta $\overline{D}$, deci un plan de front $[Q]$; se intersectează cele două plane obținând dreapta $\overline{\Delta}(\overline{F})$ de front, care intersectată cu $\overline{D}$, duce la obținerea punctului I;

Orice altă situație va fi tratată similar.



a). dreaptă oarecare, plan auxiliar de capăt.

b). dreaptă oarecare, plan auxiliar vertical.

c). dreaptă de nivel, plan auxiliar de nivel.

d). dreaptă verticală, plan auxiliar de front.

Fig. 4.33

Dacă planul ce participă la intersecție este un plan particular, un plan proiectant față de unul sau față de două plane de proiecție (un plan de capăt sau un plan de front - fig. 4.34), atunci intersecția sa cu o dreaptă, indiferent că este oarecare sau particulară, se rezolvă mult mai ușor, bazându-se pe proprietatea planelor proiectante de a conține pe una din, sau pe urmele sale proiecțiile tuturor elementelor geometrice situate în acel plan, deci şi punctul de intersecție căutat:

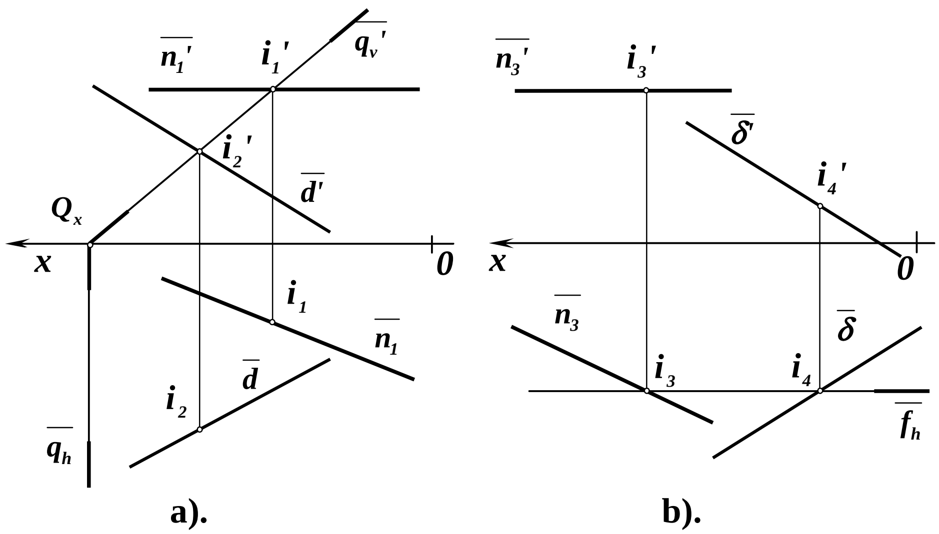


Fig. 4.34

Fig. 4.34-a, evidențiază intersecția unui plan de capăt cu o dreaptă oarecare $\overline{D}$ şi cu una de nivel $\overline{N_1}$, iar fig. 4.34-b, intersecția unui plan de front cu o dreaptă de nivel $\overline{N_3}$ şi cu una oarecare $\overline{\Delta}$. Urma verticală a planului de capăt şi urma orizontală a planului de front, intersectează proiecțiile dreptelor menționate chiar în proiecții ale punctelor de intersecție. Similar se rezolvă intersecția dreaptă-plan când planul este vertical sau de nivel.

O aplicație directă a acestui tip de intersecție dreaptă-plan, o constituie intersecția a două plane ale căror urme nu se cunosc, deci a două plăci. O astfel de intersecție, fig. 4.35, poate fi tratată similar cu cazul prezentat în fig. 4.34 –b, intersectând de fapt dreptele-laturi ale plăcilor triunghiulare cu două plane de front, (sau utilizând ca plane auxiliare plane de capăt sau verticale, fig. 4.34-a):

Cunoscând plăcile triunghiulare ***ABC*** şi ***KLM***, se cere dreapta lor de intersecție $\overline{\Delta}$. Rezolvarea parcurge următorii paşi:

- se aleg două plane auxiliare de front, $[F_1]$ şi $[F_2]$, care să taie ambele plăci;

- se intersectează pe rând cele două plane cu dreptele-laturi concurente cu ele;
- dreptele de intersecție rezultate în fiecare plan de front, fiind coplanare, sunt concurente între ele; cele două puncte astfel rezultate definesc dreapta de intersecție a celor două plăci:

$$\begin{cases} [F_1]\cap[ABC]=\overline{F_{11}} \\ [F_1]\cap[KLM]=\overline{F_{12}} \\ \overline{F_{11}}\cap\overline{F_{12}}=I_1 \end{cases} \quad (4.24); \quad \begin{cases} [F_2]\cap[ABC]=\overline{F_{21}} \\ [F_2]\cap[KLM]=\overline{F_{22}} \\ \overline{F_{21}}\cap\overline{F_{22}}=I_2 \end{cases} \quad (4.25); \quad \overline{I_1I_2}\equiv\overline{\Delta} \quad (4.26)$$

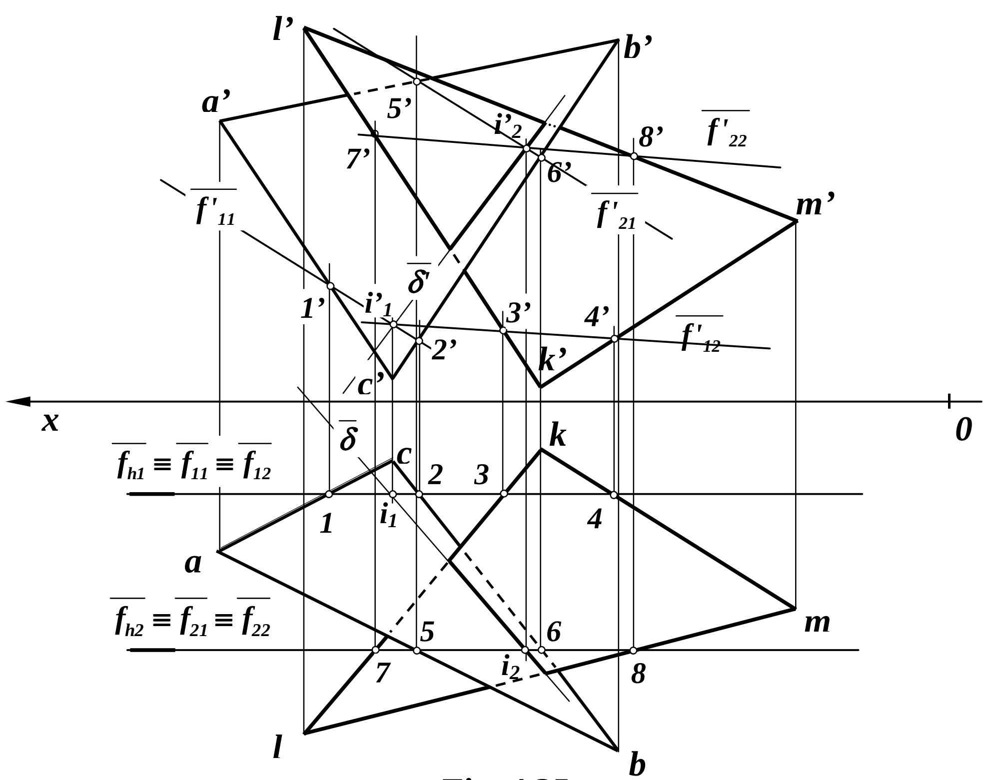


Fig. 4.35

4.7 DREPTE ŞI PLANE PERPENDICULARE

Relația de perpendicularitate este un caz particular de intersecție, indiferent că vorbim de dreaptă-plan, plan-plan, sau dreaptă-dreaptă. Vom prezenta pe rând situațiile amintite:

- dreaptă perpendiculară pe un plan;
- plane perpendiculare;
- drepte perpendiculare.

4.7.1 Dreaptă perpendiculară pe un plan. O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe toate dreptele situate în acel plan, deci şi pe dreptele de nivel şi de front ale acelui plan. Cum aceste tipuri de drepte pun în evidență perpendicularitatea în proiecția din planul de proiecție cu care sunt paralele şi cum urmele unui plan sunt: cea orizontală – dreaptă de nivel, iar cea verticală – dreaptă de front, rezultă că o dreaptă perpendiculară pe un plan are proiecțiile perpendiculare pe urmele de acelaşi nume ale planului (fig. 4.36):

$$\begin{cases} M \notin [P] \\ M \in \overline{\Delta} \\ \overline{\Delta} \perp [P] \end{cases}; \quad \text{dar} \quad \begin{cases} \overline{P_H} \parallel [H] \\ \overline{P_V} \parallel [V] \end{cases}; \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{\delta} \perp \overline{p_h} \\ \overline{\delta'} \perp \overline{p_v'} \end{cases} \qquad (4.27)$$

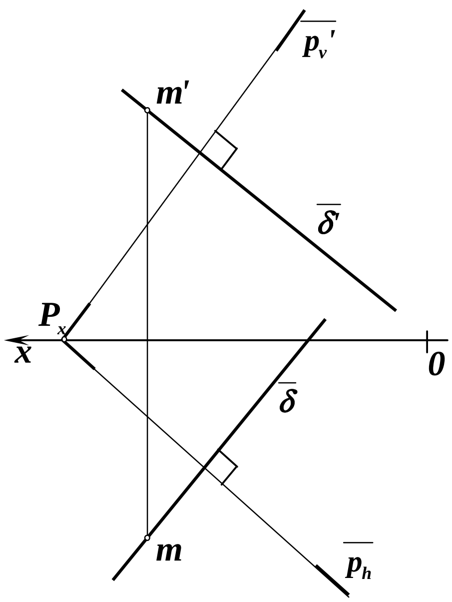


Fig. 4.36

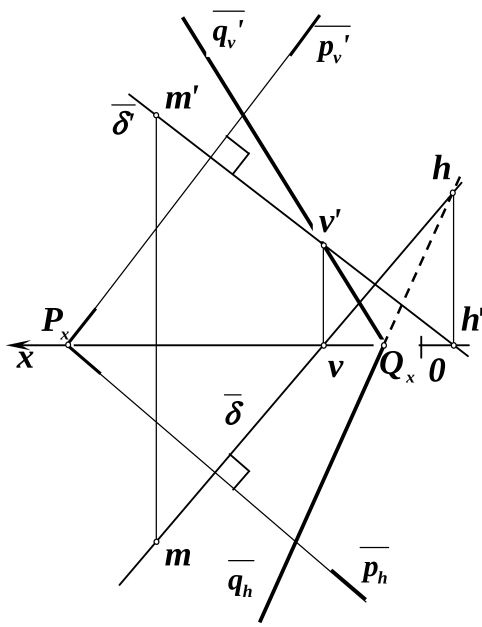


Fig. 4.37

4.7.2 Plane perpendiculare. Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt. Construcția unui plan $[Q] \perp [P]$ dat (fig. 4.37), cunoscând un punct ***M*** al viitorului plan, parcurge următoarele etape:

- prin ***M*** se construieşte o dreaptă perpendiculară pe planul $[P]$;
- se determină urmele dreptei;
- se alege Q_x (vor fi deci o infinitate de soluții), care împreună cu urmele dreptei $\overline{\Delta} \perp [P]$, determină planul perpendicular (se observă că două plane perpendiculare **nu au urmele perpendiculare)**:

$$\begin{cases} M \notin [P] \\ M \in \overline{\Delta} \perp [P] \end{cases}; \quad \text{se determină} \quad \begin{cases} H = \overline{\Delta} \cap [H] \\ V = \overline{\Delta} \cap [V] \end{cases}; \Rightarrow \begin{cases} \overline{Q_x h} \equiv \overline{q_h} \\ \overline{Q_x v'} \equiv \overline{q_v'} \end{cases}; \quad (4.28)$$

O altă aplicație interesantă a perpendicularității unui plan pe o dreaptă, este construcția planului mediator al unui segment dat (fig. 4.38). Se va construi o dreaptă de nivel (sau de front) perpendiculară în mijlocul segmentului dat. Planul mediator va conține dreapta de nivel (front), fiind perpendicular pe segmentul dat:

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad \text{şi} \quad M \in \overline{N} \perp \overline{AB} \qquad \Rightarrow \begin{cases} [P] \supset \overline{N} \\ [P] \perp \overline{AB} \end{cases} \tag{4.29}$$

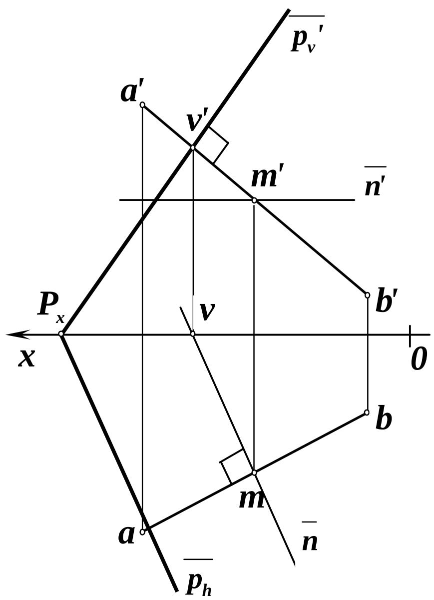


Fig. 4.38

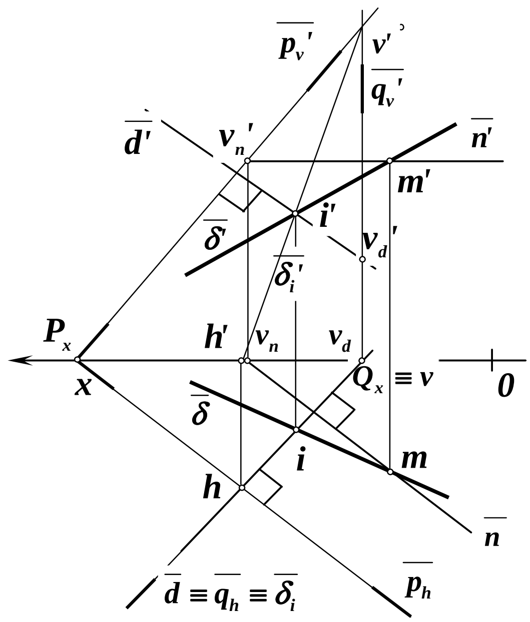


Fig. 4.39

4.7.3 Drepte perpendiculare. Construcția a două drepte oarecare şi perpendiculare era imposibilă pe căi directe, până în acest moment. Rezolvarea acestei probleme este relativ simplă, aplicând proprietățile planelor şi dreptelor perpendiculare. Se cunoaşte deci o dreaptă $\overline{D}$ şi un punct ***M***, prin care trebuie construită a doua dreaptă $\overline{\Delta}$, perpendiculară pe prima (fig. 4.39). Se va proceda în felul următor:

- prin punctul ***M*** se construieşte o dreaptă de nivel (sau de front), perpendiculară pe dreapta $\overline{D}$, care va direcționa urma orizontală (respectiv verticală) a unui plan $[P]$ perpendicular pe $\overline{D}$;
- se intersectează dreapta $\overline{D}$ cu planul $[P]$, cu ajutorul unui plan auxiliar $[Q]$, rezultând punctul ***I***;
- dreapta $\overline{D}$ este perpendiculară pe toate dreptele planului $[P]$, cea care este soluție a acestei probleme este dreapta $\overline{\Delta}$, ce conține punctele ***M*** şi ***I***:

$$\begin{cases} M \notin \overline{D} \\ M \in \overline{N} \perp \overline{D} \end{cases}; \quad \begin{cases} [P] \supset M \\ [P] \supset \overline{N} \\ [P] \perp \overline{D} \end{cases}; \quad \begin{cases} \overline{D} \subset [Q] \\ [Q] \cap [P] = \overline{\Delta_I} \\ \overline{\Delta_I} \cap \overline{D} = I \end{cases}; \quad \Rightarrow \begin{cases} \overline{IM} \equiv \overline{\Delta} \\ \overline{\Delta} \perp \overline{D} \end{cases}; \qquad (4.30)$$

4.8 REPREZENTAREA COMBINAȚIILOR DE PLANE PARTICULARE

Mai multe plane particulare din categoria plane paralele cu un plan de proiecție, sau perpendiculare pe un plan de proiecție, închid între ele o zonă din spațiu pe care o putem considera un solid (obiect).

4.8.1 Tripla proiecție ortogonală a solidelor. Aşezând în primul triedru solidul din fig. 4.40, se constată că el este alcătuit din trei plane de nivel $[N_1]$, $[N_2]$, $[N_3]$, din două plane de front $[F_1]$, $[F_2]$ şi din trei plane de profil $[P_1]$, $[P_2]$, $[P_3]$. (porțiuni din aceste plane).

A proiecta obiectul dat pe cele trei plane de proiecție înseamnă a reprezenta urmele planelor particulare ce îl alcătuiesc şi fețele-figuri plane situate în ele. Conturul acestor fețe plane este format din segmente ale urmei unui plan cuprinse între urmele altor două plane particulare (de exemplu în proiecția verticală, din urma $\overline{P_{V1}}$ a planului $[P_1]$, se va utiliza segmentul cuprins între urmele $\overline{N_{V2}}$ şi $\overline{N_{V3}}$, ale planelor de nivel respective).

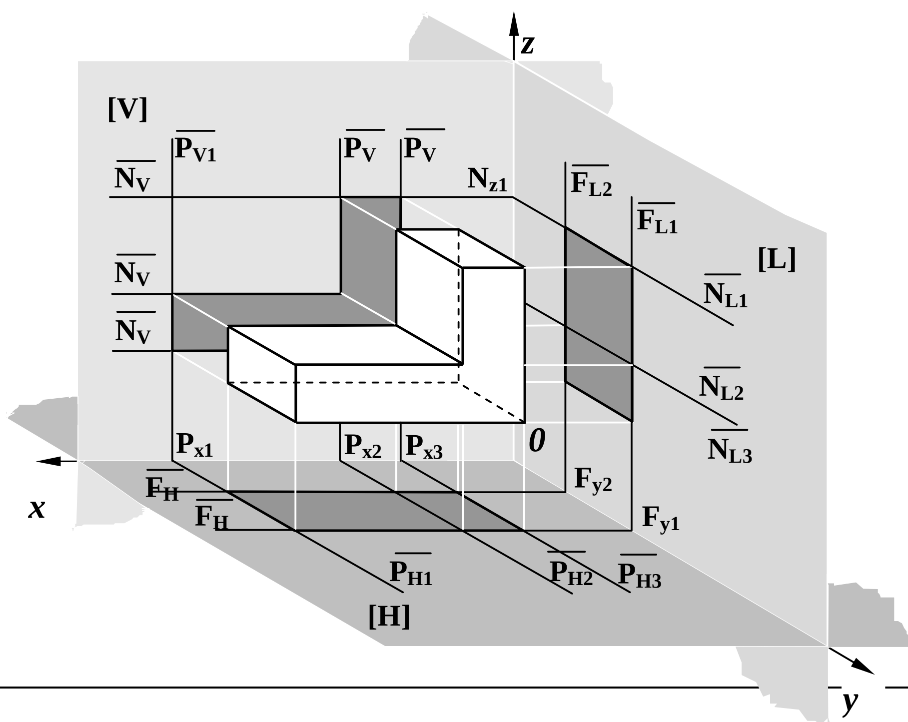


Fig. 4.40

Cele opt plane particulare au ca definiție:

$$
\begin{array}{lll}
[N_1] & \rightarrow & z_1 = \; const. \\
[N_2] & \rightarrow & z_2 = \; const. \\
[N_3] & \rightarrow & z_3 = \; const. \\
[F_1] & \rightarrow & y_1 = \; const. \\
[F_2] & \rightarrow & y_2 = \; const. \\
[P_1] & \rightarrow & x_1 = \; const. \\
[P_2] & \rightarrow & x_2 = \; const. \\
[P_3] & \rightarrow & x_3 = \; const.
\end{array}
\qquad (4.31)
$$

În epură (fig. 4.41), cu coordonatele de definiție ale celor opt plane, proiecțiile solidului (obiectului) se obțin imediat. Se constată că poziția obiectului în triedrul I, mai aproape sau mai departe de cele trei plane de proiecție, nu influențează aspectul proiecțiilor.

Mărimea acestora este dată de poziția relativă a planelor particulare ce îl alcătuiesc. În acest sens, tripla proiecție ortogonală a unui solid se poate realiza renunțând la trasarea axelor de coordonate.

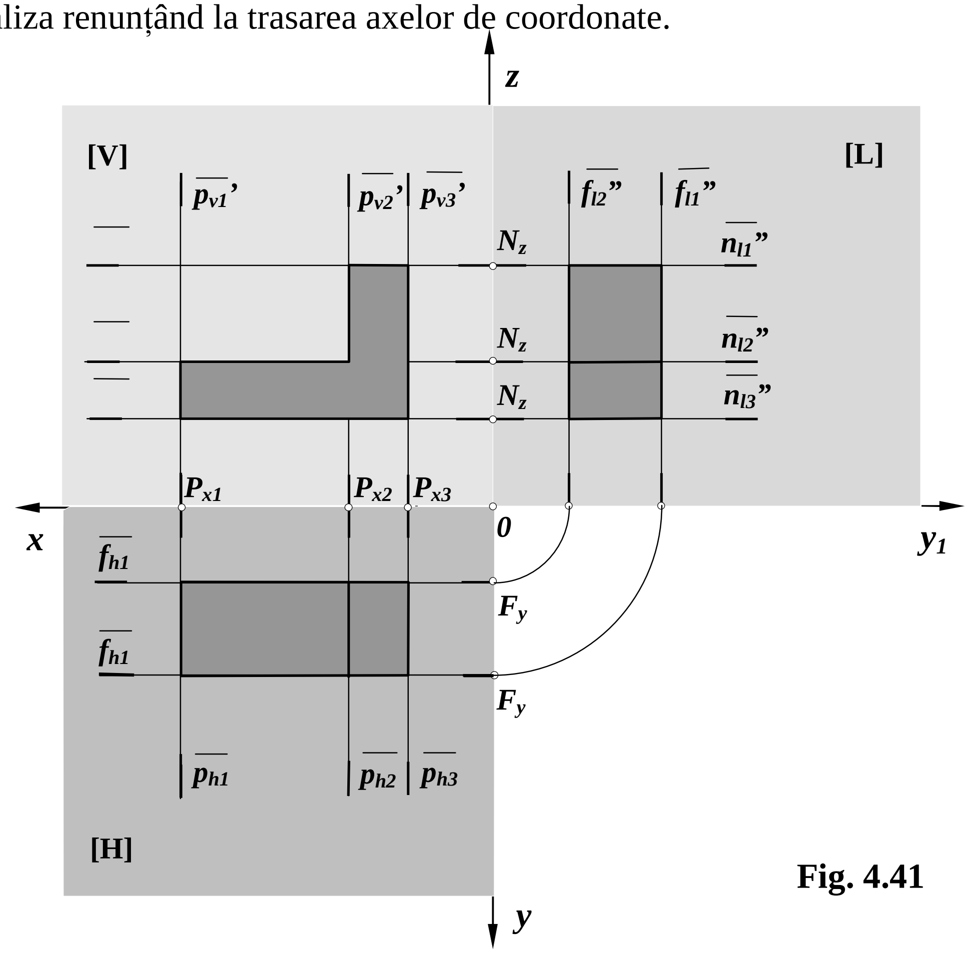


Fig. 4.41

4.8.2 Dreptunghiuri de încadrare. Fiecare dintre cele trei proiecții ale solidului are ca dimensiuni de gabarit (fig. 4.42), diferența dintre coordonatele de definiție ale planelor particulare paralele, cele mai depărtate, ale căror urme apar în acea proiecție. Aceste dimensiuni constituie laturile dreptunghiurilor de încadrare, elemente auxiliare foarte utile în realizarea triplei proiecții ortogonale a unui obiect. Valorile acestor dimensiuni pe cele trei direcții ***x, y, z,*** sunt:

$$\begin{cases} \Delta X = x_1 - x_3 \\ \Delta Y = y_1 - y_2 \\ \Delta Z = z_1 - z_3 \end{cases} \tag{4.32}$$

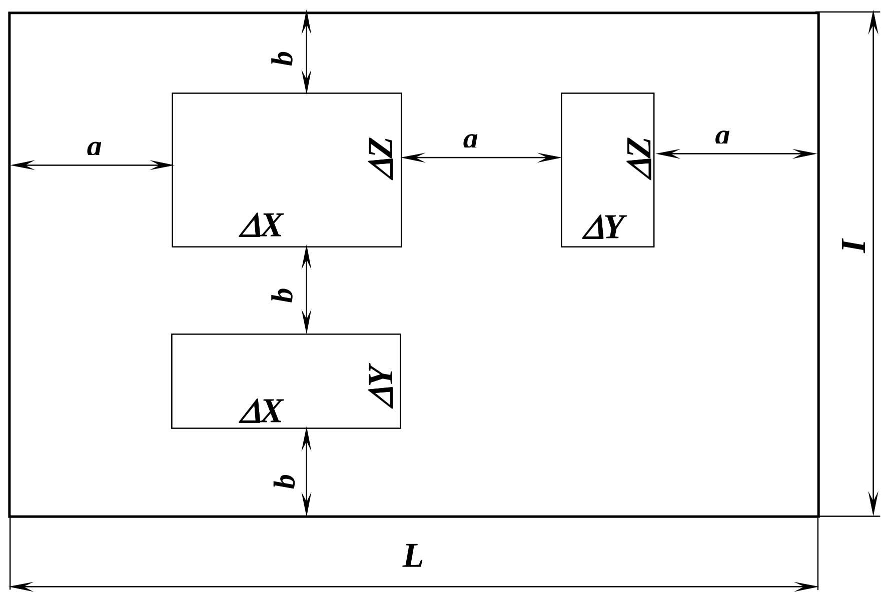


Fig. 4.42

Amplasarea celor trei proiecții (fig. 4.42) fără axele de coordonate, într-un spațiu de dimensiunile ***L***x***I***, se face determinând valorile ***a*** și ***b*** cu relațiile:

$$\begin{cases} L = 3a + \Delta X + \Delta Y \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{L - (\Delta X + \Delta Y)}{3} \\ \\ I = 3b + \Delta Y + \Delta Z \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{I - (\Delta Y + \Delta Z)}{3} \end{cases} \tag{4.33}$$

Corespondența de proiecții este asigurată prin aceleași linii de ordine folosite la proiecțiile punctului sau dreptei, imaginare de data aceasta, trasarea lor efectivă încărcând excesiv desenul.

Laturile dreptunghiurilor de încadrare sunt folosite integral sau parțial pentru conturul celor trei proiecții ortogonale ale obiectului (fig. 4.43). Fiind elemente ajutătoare, dreptunghiurile de încadrare se trasează cu linie continuă subțire, care la sfârşit se pot şterge, în timp ce proiecțiile folosesc pentru contur linie continuă groasă. Raportul între linia subțire şi cea groasă este conform standardelor, de 1/3 ÷ 1/2.

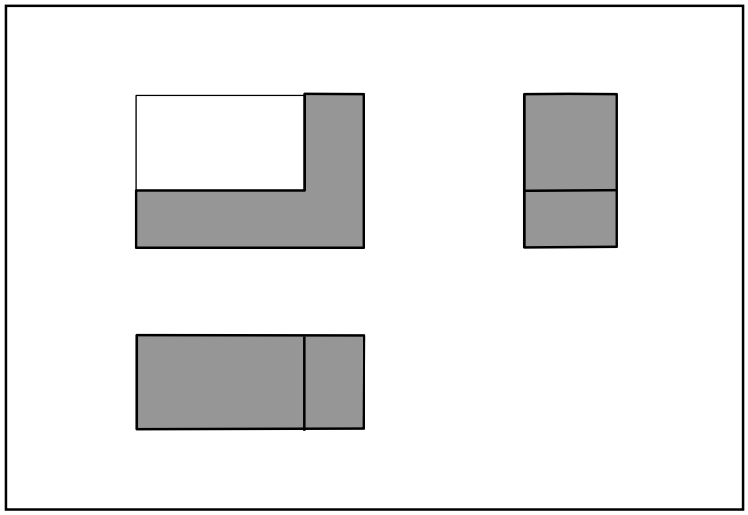


Fig. 4.43

4.8.3 Cotarea. Elementele grafice ale cotării. Informațiile dimensionale necesare atât reprezentării cât şi execuției unui obiect şi care însoțesc proiecțiile acestuia, se numesc *cote*. Ele se exprimă în milimetrii şi se măsoară pe direcții paralele cu muchiile sau fețele obiectului. Pentru simplificarea reprezentării, obiectul se aşează cu fețele paralele cu planele de proiecție, deci cotele vor fi paralele cu axele de coordonate. Rezultă că fiecare cotă ar putea fi înscrisă în două dintre cele trei proiecții, ceea ce nu este permis. Cota se va înscrie **o singură dată**, în proiecția în care elementul cotat **este cel mai bine definit**. Execuția grafică a cotării presupune folosirea *liniilor de cotă* subțiri, terminate cu săgeți de ~15^{o} la vârf şi ~3mm lungime (fig. 4.44).

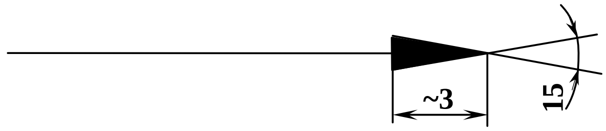


Fig. 4.44

Liniile de cotă se sprijină pe *linii ajutătoare de cotă* (linie continuă subțire), ce se reprezintă în prelungirea unor linii de contur paralele între ele, sau perpendicular pe segmentul ce urmează a fi cotat (înălțimea triunghiului înnegrit reprezentând vârful săgeții din fig. 4.44), pentru cote liniare. În cazul cotelor unghiulare, linia de cotă este un arc de cerc cu centrul în vârful unghiului, iar liniile ajutătoare sunt prelungiri ale laturilor unghiului de cotat. Liniile ajutătoare depăşesc vârful săgeții liniei de cotă cu ~2mm. Valoarea numerică a cotei se înscrie deasupra liniei de cotă sau la stânga ei (pentru linii de cotă verticale sau oblice), perpendicular pe aceasta şi întotdeauna de partea groasă a săgeții, între liniile ajutătoare, când spațiul permite, sau în afara lor, când spațiul nu permite (fig. 4.44 şi 4.45).

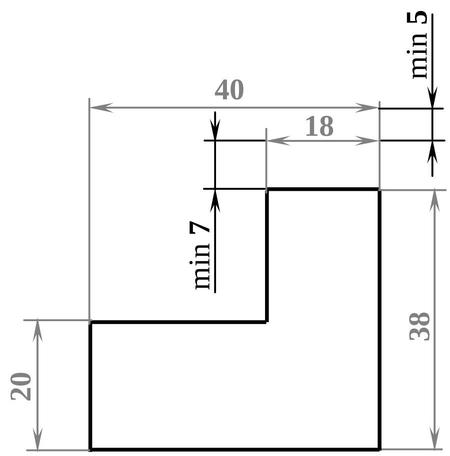


Fig. 4.45

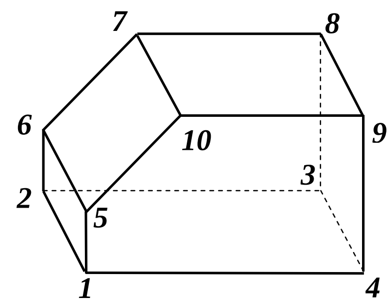


Fig. 4.46

Cotele cu valori mai mici (fig. 4.45), vor fi distribuite mai aproape de contur (de exemplu 18), în timp ce acelea cu valori mai mari (de exemplu 40), mai departe de contur, astfel ca liniile ajutătoare să nu intersecteze linii de cotă. Linia de cotă cea mai apropiată de contur se poziționează la minim 7mm, iar liniile de cotă succesive, paralele între ele, la minim 5mm între ele.

4.8.4 Determinarea celei de a III-a proiecții. Fiind cunoscute două dintre cele trei proiecții ortogonale ale unui obiect, se cere determinarea celei de a III-a. Problema este similară cu determinarea celei de a III-a proiecții a unui punct, când se cunosc celelalte două, doar că trebuie extinsă pentru mai multe puncte, respectiv nodurile obiectului în cauză. Prin noduri se înțeleg intersecțiile muchiilor, care la rândul lor sunt intersecțiile fețelor obiectului.

Determinarea celei de a III-a proiecții este o problemă dificilă, rezolvarea ei cerând imaginație spațială şi capacitate de sinteză celui ce o abordează.

Pentru exemplificare folosim obiectul din fig. 4.46, în care am notat nodurile cu numere de la **1** la **10**, şi corespunzător proiecțiile lor din fig. 4.47 şi 4.48. Sinteza proiecției laterale când se cunosc celelalte două, se face găsind proiecțiile laterale ale fiecărui nod (ca în tripla proiecție ortogonală a punctului). Se duc linii de ordine pe direcția ***z*** şi ***y*** (sau urmele planelor particulare în care se găsesc nodurile respective), care se întâlnesc în proiecția laterală căutată.

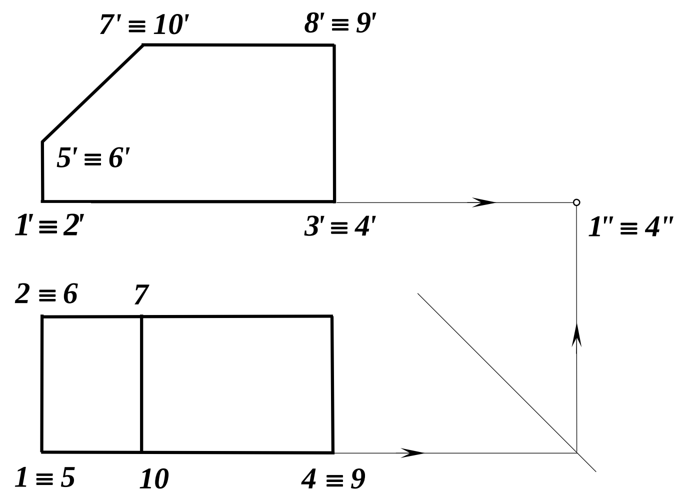


Fig. 4.47

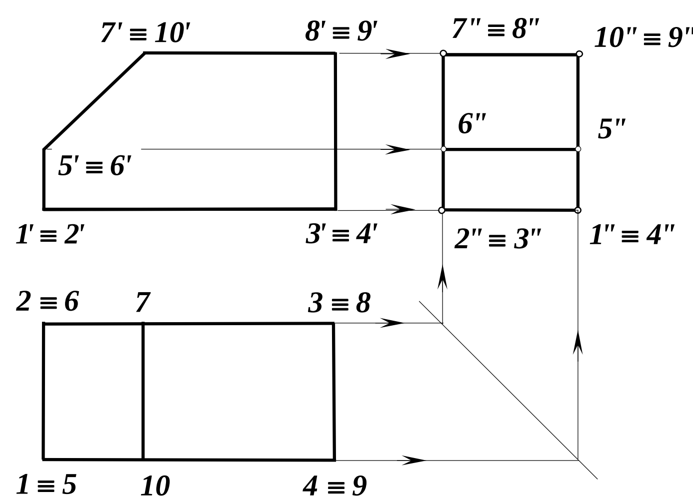


Fig. 4.48

4.9 APLICAȚII

1. Se dau punctele **A(145; -70; 30), B(120; 45; 10), C(60; 20; 50), D(50; 40; 30), E(40; 30; 30).** Se cere:

a) $[P] \supset \overline{AB} \equiv l.c.m.m.p./[V]$
b) $\hat{\beta}\{[P];[V]\}$
c) $[Q] \supset C \wedge D \wedge E$
d) $\overline{\Delta} = [P] \cap [Q]$
e) $I = \overline{AB} \cap [Q]$
f) $E \in [S] \parallel [P]$.

2. Se dau punctele **M(50; y; 20), A(30; 40; z)** şi planul **[P]** definit de punctele: **P_x(100; 0; 0), H(30; 80; 0), V(30; 0; 55)**. Se cere:

a) $M \in [P] \Rightarrow y_M$
b) $A \in [P] \Rightarrow z_A$
c) paralelogramul $[ABCD]$, pentru care M este intersecția diagonalelor, iar $\overline{AB} = 40mm$ se află pe o dreaptă de front a planului **[P].**

3. Se dau punctele **A(50; 10; 65), H(70; 40; 0), M(35; 30; 45), Q_x(-5; 0; 0)**.Se cere:

a) $[P] \supset \overline{AH} \equiv l.c.m.m.p./[H]$; $\hat{\alpha}\{[P];[H]\}$
b) $[Q] \perp [P]$: $[Q] \supset M \wedge Q_x$
c) $\overline{\Delta} = [P] \cap [Q]$
d) $M \in [R] \parallel [P]$

4. Se dau punctele **A(45; 10; 15), B(25; -20; 45), C(20; -15; 30), E(60; y; 30), R_x(65; 0; 0)**.Se cere:

a) $[Q] \supset A \wedge B \wedge C$
b) $E \in [Q] \Rightarrow y_E$
c) $[R] \supset R_x \wedge V \wedge H$
d) $[P] \supset \overline{MN} \equiv l.c.m.m.p./[V]$; $\hat{\beta}\{[P];[V]\}$
e) $I = [P] \cap [Q] \cap [R]$

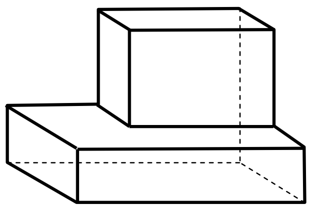
5. Se dau punctele **A(75; 45; 10), B(45; 20; 55), C(20; 70; 35), M(80; 65;65)**. Se cere:

a) $[P] \supset A \wedge B \wedge C$;
b) $\overline{MI} \perp [P]$: $I = \overline{MI} \cap [P]$;
c) $\Delta[IJK] \equiv \Delta isoscel$; $[P] \supset |\overline{IJ}| = |\overline{IK}| = 50mm$; $\overline{IJ} \parallel [H]$; $\overline{IK} \parallel [V]$;

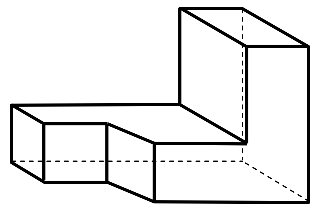
d) ***să se verifice că*** $\overline{JK} \in [P]$**.**

6. Fie două plăci opace **[ABC]**, **[DEF]** şi punctul **M** exterior lor. Prin **M** să se construiască dreapta $\overline{\Delta}$ paralelă simultan cu planele celor două triunghiuri, fără a construi urmele acestor plane. Să se stabilească vizibilitatea celor două plăci. Se cunosc: **A(80; 5; 85), B(95; 40; 30), C(45; 95; 70), D(65; 60; 95), E(75; 100; 65), F(35; 70; 30)** şi **M(25; 25; 45).**

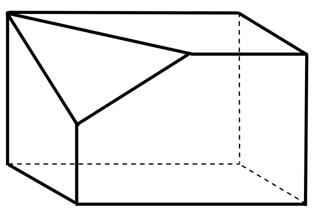
7*a-d*. Să se reprezinte în triplă proiecție ortogonală, următoarele obiecte:



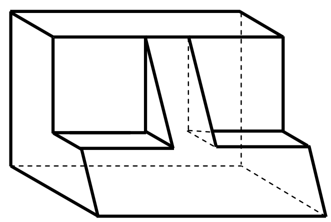
a).



b).

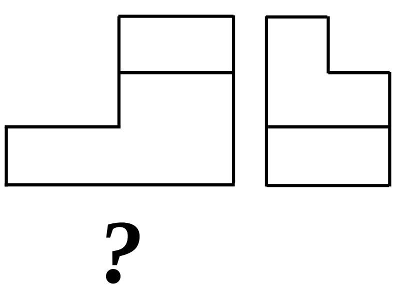


c).

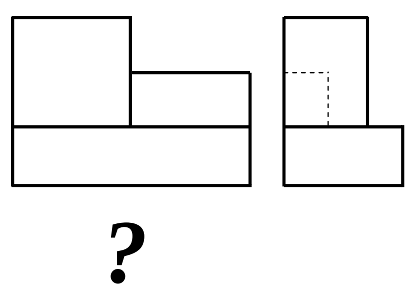


d).

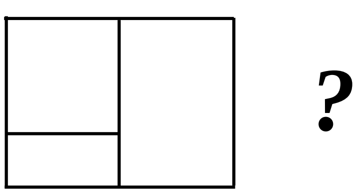
8*a-d*. Să se determine a treia proiecție, fiind cunoscute două:

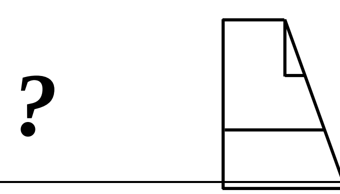


a).



b).





c). ***d).***